Gewöhnliche Differentialgleichung: NWI
-Sophiane Yahiatene-

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und m eine Masse, die sich in der $xy-$Ebene auf dem Graphen von f bewegt. Die kinetische und potentielle Energien sind durch

$$T(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (f_x(x, y)\dot{x} + f_y(x, y)\dot{y})^2)$$
$$U(x, y) = gmf(x, y)$$

gegeben.

Aufgabe 13.1 Behauptung: Genau dann ist die ruhende Kugel im Punkt (x_0, y_0) im Gleichgewicht, wenn $f_x(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = 0$

Beweis.

$$L := T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (f_x(x, y)\dot{x} + f_y(x, y)\dot{y})^2) - gmf(x, y)$$

Die Euler-Lagrange Differentialgleichungen, wobei die Argumente weggelassen wurden, lauten

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= m(\ddot{x} + f_{xx}f_x\dot{x}^2 + f_{xx}f_y\dot{x}\dot{y} + f_{xy}f_x\dot{x}\dot{y} + f_{xy}f_y\dot{y}^2 + f_x^2\ddot{x} + f_{xx}f_x\dot{x}^2 + f_{yy}f_x\dot{x}\dot{y} + f_y\ddot{y} + f_{yx}f_x\dot{x}\dot{y} + f_{yy}f_x\dot{y}^2) \\ &= m(f_{xx}f_x\dot{x}^2 + f_{yx}f_x\dot{x}\dot{y} + f_{xx}f_y\dot{x}\dot{y} + f_{yx}f_y\dot{y}^2) - gmf_x = \frac{\partial L}{\partial x} \\ \Leftrightarrow 0 &= \ddot{x} + f_x^2\ddot{x} + f_{xx}f_x\dot{x}^2 + f_{yy}f_x\dot{x}\dot{y} + f_y\ddot{y} + f_{yx}f_x\dot{x}\dot{y} + f_{yy}f_x\dot{y}^2 + gf_x\end{aligned}$$

Bei der Äquivalenzumformung wurde die Glattheitseigenschaft benutzt, d.h. es gilt $f_{xy} = f_{yx}$.
Durch Vertauschen von y mit x erhält man aus Symmetriegründen die fehlende Euler-Langrange Differentialgleichung.
Nun ist die Behauptung klar. □

Aufgabe 13.2 Bei $(0, 0)$ sei ein Gleichgewichtspunkt. Die Taylorentwicklung der kinetischen Energie für $z := (x, y, \dot{x}, \dot{y})$, $h := (h_1, h_2, h_3, h_4) \in \mathbb{R}^4$ bis zum 2.Glied lautet

$$T(z + h) = T(z) + < \mathrm{grad}T(z)^t, h > + \frac{1}{2} < h, H_T(z)h > + o(\|h\|^2).$$

Für $z = (0, 0, 0, 0)$ erhält man

$$T(h) = \frac{1}{2} < h, m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} h > + o(\|h\|^2) = \frac{m}{2}(h_3^2 + h_4^2) + o(\|h\|^2).$$

Seien $u := \frac{x}{\alpha}, v := \frac{y}{\beta}$ mit $\beta = \alpha = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}$ neue Koordinaten, so gilt

$$T(u, v, \dot{u}, \dot{v}) \approx \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \left(\sqrt{\frac{m}{2}}\dot{x}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{m}{2}}\dot{y}\right)^2 = \left(\frac{\dot{x}}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\beta}\right)^2 = \dot{u}^2 + \dot{v}^2$$

Aufgabe 13.3 Zeige, dass das Gleichgewicht $(0, 0)$ stabil ist, wenn f bei $(0, 0)$ ein lokales Minimum hat und $f(0, 0) = 0$ gilt.

Die potentielle Energie lautet

$$U(x, y) = gmf(x, y).$$

Dementsprechend lautet die Hessematrix von U (ohne das Argument (x,y))

$$H_U = gm \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & 0 & 0 \\ f_{yx} & f_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgrund der Glattheit von f ist H_U symmetrisch, also ist H_U diagonalisierbar. Mittels Basistransformation nehme nun an, dass

$$H_U = m \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, 0)$$

gilt, wobei

$$\lambda_{1/2} = g\left(\frac{f_{xx} + f_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f_{xx}}{2}\right)^2 + \left(\frac{f_{yy}}{2}\right)^2 - \frac{f_{xx}f_{yy}}{2} + f_{xy}^2}\right)$$

ist.
Nun ist die Taylorentwicklung von U bis zum 2. Glied um $(0,0,0,0)$

$$U(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \approx \frac{m}{2}(\lambda_1' x^2 + \lambda_2' y^2),$$

wobei $\lambda_{1/2}' = \lambda_{1/2}(0,0)$ ist.
Mittels Aufgabe 13.2 erhält man die (approximierten) Euler-Lagrange Differentialgleichungen

$$\ddot{x} = -\frac{\lambda_1'}{2} x$$
$$\ddot{y} = -\frac{\lambda_2'}{2} y$$

Nach Vorlesung 13 (Seite 5) ist der Gleichgewichtspunkt stabil, wenn $\lambda_{1/2}' > 0$ und instabil, wenn $\lambda_{1/2}' < 0$ ist.
Da die Konstanten $\lambda_{1/2}'$ unabhängig von der Masse sind, ist auch die Stabilitätseigenschaft unabhängig der Masse.
Außerdem gilt nach Vorlesung für die Eigenfrequenz $\nu_{1,2} = \frac{\sqrt{\lambda_{1/2}'}}{2\pi}$.